Tetraederwinkel

Wir betrachten einen Tetraeder mit Seitenlänge 1. Die Grundfläche legen die Vektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den dritten Vektor erhält man durch die Bedingung, daß er mit jeweils einen der anderen beiden Vektoren ein gleichseitiges Dreieck aufspannt und also ein Zwischenwinkel von 60° besteht. Außerdem kann dieser Vektor aus symmetriegründen keine y-Komponente haben und sein Betrag muß 1 sein:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Nun muß der Schwerpunkt des Tetraeders aus Symmetriegründen auf dem Schnittpunkt der Mittensenkrechten liegen. Die Schwerpunkte der Seitendreiecke liegen bei $1/3\vec{x}_i + 1/3\vec{x}_j$ wobei $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ist. Nun sind also zwei Geraden von jeweils einer Spitze zum Schwerpunkt des gegenüberliegenden Seitendreiecks gegeben durch:

$$\begin{aligned} g_1 &= \vec{x}_3 + \lambda[\vec{x}_3 - \frac{1}{3}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)] \\ g_2 &= \vec{x}_1 + \mu[\vec{x}_1 - \frac{1}{3}(\vec{x}_2 + \vec{x}_3)] \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt $\lambda = \mu = -3/4$. Also ist der Schwerpunkt durch den Vektor $\vec{s}$ gegeben:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{12}\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad |\vec{s}| = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

Nun verschieben wir den Scherpunkt ins Zentrum des Koordinatensystems und berechnen das Skalarprodukt zwischen zwei beliegigen Vektoren vom Mittelpunkt zu den Eckpunkten:

$$\vec{x}_1' = \vec{x}_1 - \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$(-\vec{s}) \cdot \vec{x}_1' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{12}\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12}\sqrt{6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} = |\vec{s}|^2 \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

Also beträgt der Tetraederwinkel ca. 109°.