1. Orthogonale Transformationen.

Definition 1.1: Unter einer orthogonalen Transformation versteht man eine Koordinatentransformation D mit

$$D^T \cdot D = 1 \quad \wedge \quad \det D = +1$$

Im Folgenden beschränke ich mich auf den $\mathcal{R}^3$. Im R^3 beschreiben drei generalisierte Koordinaten jede Drehung, die sog. Euler Winkel. Sie beschreiben drei aufeinanderfolgende Drehungen, wobei es mehrere Konventionen gibt. Die hier verwendete Konvention besteht aus einer Sequenz von Drehungen um die z-Achse, um die x'-Achse und die z''-Achse. Dabei sind die Winkel so gewählt, daß sie eine Linksdrehung der Koordinatensysteme von $KS \to KS' \to KS'' \to KS'''$ beschreiben, also eine Rechtsdrehung, wenn man die Drehungen als Operation auf Vektoren angewandt auffaßt. In Matrixschreibweise heißt dies folgendes:

$$D = A(\psi)B(\theta)C(\phi)$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Cayley-Klein Parameter

Obwohl die Cayley-Klein Parameter als generalisierte Koordinaten zur Darstellung von Drehungen nicht geeignet sind, sind sie doch sehr nützlich in nummerischen Verfahren. Die Idee hinter den Cayley-Klein Parametern ist es einen Homomorphismus zwischen den 3×3 reellen orthogonalen und den 2×2 unitären complexen Matrizen zu konstruieren.

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{C}$$

und

$$Q^\dagger Q = 1$$

Aus der Unitaritätsbeziehungen kann man sofort ableiten, daß

$$\beta = -\gamma^* \quad \wedge \quad \delta = \alpha^*$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

gilt. Mit der weiteren Bedingung $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ könnten die vier Parameter auf drei reduziert werden, was wir aber nicht tun wollon.

Wir definieren nun eine Matrix P wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \text{ mit } x, y, z \in \mathcal{R}$$

, die wir physikalisch als Punkt (x, y, z) interpretieren wollen, und betrachten wir das Transformationsverhalten von P unter Q:

$$P' = QPQ^{-1} = QPQ^\dagger$$

Da P eine hermite'sche Matrix mit Spur Null ist, und diese Eigenschaften unter Ähnlichkeitstransformationen invariant sind muß P' wieder von der Form

$$P = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \text{ mit } x, y, z \in \mathcal{R}$$

sein. Der Wert der Determinante ist ebenfalls invariant unter Ähnlichkeitstransformationen, so daß man schreiben kann:

$$\det P = -(x^2 + y^2 + z^2) = -({x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2) = detP'$$

was die Orthogonalitätsbedingung darstellt. Aus diesen Überlegungen folt, daß es zu jeder unitären Matrix Q in einem zweidimensionalen complexen Vektorraum eine zugeordnete reelle orthogonale Matrix D im $\mathcal{R}^3$ gibt.

Bezeichnen wir diese zuordnung mit h, so gilt:

$$D = h(Q)$$

Es kann gezeigt werden, daß gilt:

$$h(Q_1 \circ Q_2) = h(Q_1) \circ h(Q_2) = D_1 \circ D_2$$

Also ist h ein homomorphismus, der die 2×2 unitären complexen Matrizen auf die 3×3 orthogonalen reellen Matrizen abbildet.

Vergleicht man nun die Transformation eines Vektors p im R^3 und die Transformation der Matrix P, so ergibt sich durch vergleich der Koeffizienten:

$$D = \begin{pmatrix} 1/2(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & i/2(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ i/2(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & 1/2(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix}$$

ersetzt man weiterhin:

$$\alpha = e_0 + ie_3$$
$$\beta = e_2 + ie_1$$

so schreibt sich die Zusatzbedingung, die es ermöglicht die vier reelle Werten auf drei, also auf veralgemeinerte Koordinaten, zu reduzieren, so:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

Mit ein wenig Algebra ergibt sich:

$$D = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}$$

Warum diese Schreibweise sinnvoll ist wird sich später zeigen.

Um nun von den Eulerwinkeln auf die Cayley-Klein Parameter zu schließen wendet man die Transformationsformel im $\mathcal{R}^3$ um die z-Achse auf einen Vektor $p = (x, y, z)$ an und durch koeffizientenvergleich schließt man auf die Cayley-Klein Parameter. Es ergibt sich:

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos\theta/2 & ie^{i(\psi-\phi)/2} \sin\theta/2 \\ ie^{-i(\psi-\phi)/2} \sin\theta/2 & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$e_0 = \cos\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad e_2 = \sin\frac{\phi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$e_1 = \cos\frac{\phi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad e_3 = \sin\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit ergibt sich wenn man die Pauli-Spin-Matrizen und die 1-Matrix als Basis für die Drehmatrizen Q und Punktmatrizen P verwendet.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}$$
$$Q = e_0 1 + i(e_1\sigma_1 + e_2\sigma_2 + e_3\sigma_3)$$
$$Q_{\alpha_i} = 1\cos\frac{\alpha_i}{2} + i\sigma_i \sin\frac{\alpha_i}{2} = e^{i\sigma_i\cdot(\alpha_i/2)}$$

wobei α_1 der Winkel bei der Linksdrehung des Koordinatensystems um die x-Achse, α_2 um die y-Achse und α_3 um die z-Achse ist.

3. Drehungen als Operation angewandt auf Vektoren.

Der Anschauung am gelegensten kommt eine Darstellung der Drehung, bei der man die Drehachse durch einen Einheitsrichtungsvektor $\vec{n}$ und den Drehwinkel um diese Achse Φ angibt. Hier ist $\vec{n}$ so gewählt, daß er in die entgegengesetzte Richtung von $\vec{\omega}$ zeigt. Dies ist notwedig, damit die Koordinatensystemrotation eine linksdrehung sit, auch wenn die Drehung als Operator angewandt auf eine Vektor eine Rechtsdrehung ist.

$$\vec{n} = -\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$$

$$r' = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}) + [\vec{r} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r})]\cos\Phi + (\vec{r}\times\vec{n})\sin\Phi$$

mit den Definitionen:

$$e_0 = \cos\Phi/2$$
$$\vec{e} = \vec{n}\cdot\sin\Phi/2$$

schreibt sich die Transformation:

$$\vec{r'} = \vec{r}(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2\vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{r}) + 2(\vec{r}\times\vec{e})e_0$$

In Matrixschreibweise erhält man dieselbe Matrix wie im Abschnitt zu den Cayley-Klein Parametern, was den Cayley-Klein Parametern eine anschauliche Bedeutung zukommen läßt.

$$D = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}$$

oder in Koordinaten:

$$d_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - e_ke_k) + 2e_ie_j + 2\epsilon_{ijk}e_0e_k$$

Im Vergleich mit den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte ergibt sich:

$$Q = 1\cos\frac{\Phi}{2} + i\vec{n}\vec{\sigma}\sin\frac{\Phi}{2}$$

$$Q = e^{i\vec{n}\vec{\sigma}\cdot(\Phi/2)}$$

$$\cos\frac{\Phi}{2} = \cos\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

4. Drehungen mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

In diesem Abschnitt betrachten wir Drehungen, wobei $\vec{\omega}(t)$ die Drehung von einem Koordinatensystem KS' (das Körpersystem) relativ zum Koordinatensystem KS (das Raumsystem) beschreibt. Gilt z.B. $\vec{z} = \vec{z}'$, d.h. die Drehung findet nur in der x-y-Ebene statt, so drehen sich $\vec{x}'$ und $\vec{y}'$, wenn die Blickrichtung in Richtung von $\vec{z}$ zeigt, nach rechts bezüglich $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Es gilt dann:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{KS} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

oder als Operator geschrieben:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{KS} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega}\times$$

Im Körpersystem, das fest mit dem starren Körper verbunden ist gilt dann für die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_{y'} &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_{z'} &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{aligned}$$

und im Raumsystem, auf das sich die Eulerwinkel beziehen gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_{x} &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\
\omega_{y} &= -\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi \\
\omega_{z} &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}
\end{aligned}$$

5. Die Coriolis-Kraft

$$\begin{aligned}
(\vec{F})_{KS} &= m(\vec{a})_{KS'} + 2m(\vec{\omega}\times(\vec{v})_{KS'}) + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\
(\vec{F})_{KS'} &= (\vec{F})_{KS} - 2m(\vec{\omega}\times(\vec{v})_{KS'}) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})
\end{aligned}$$

6. Drehimpuls und kinetische Energie

$$\vec{L} = m_i(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m_i(\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)) \\
&= m_i(\vec{\omega}(\vec{r}_i)^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})) = I\vec{\omega}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \textstyle\sum_i m_i(\delta_{jk}(\vec{r}_i)^2 - x_{ij}x_{ik}) \\
&= \textstyle\int_V \rho(\vec{r})(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)dV
\end{aligned}$$

zur kinetischen energie gelangt man über:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \frac{\vec{\omega}}{2}m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I_{jk}\cdot\vec{\omega} \\
&= \omega^2/2\vec{n}\cdot I_{jk}\cdot\vec{n} = 1/2I\omega^2
\end{aligned}$$

7. Die Euler'schen Bewegungsgleichungen und die drehmomentfreie Bewegung eines starren Körpers

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{KS} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Diese Beziehung nach Koordinaten aufgelöst ergibt im Körpersystem:

$$\begin{array}{rcrcl} I_1\dot{\omega}_1 & - & \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) & = & N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 & - & \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) & = & N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 & - & \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) & = & N_3 \end{array}$$

oder bei keinem äußeren Drehmoment:

$$\begin{array}{rcl} I_1\dot{\omega}_1 & = & \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) \\ I_2\dot{\omega}_2 & = & \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) \\ I_3\dot{\omega}_3 & = & \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) \end{array}$$

Mit den zwei ersten Integralen für die konstante kinetische Energie und den konstanten Drehmomentvektor ist es möglich diese Gleichungen vollständig mit elliptischen Integralen zu Lösen. Eine geometrische Veranschaulichung der Bewegung des starren Körpers liefert uns folgende Überlegung.

Gehen wir in ein Koordinatensystem, das fest mit dem starren Körper verbunden ist, und definiert man einen Vektor $\vec{\rho}$, der entlang der momentanen Drehachse verläuft:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{\omega}}{\omega\sqrt{I}} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

und betrachten wir die Funktion $F(\vec{\rho})$:

$$F(\vec{\rho}) = \vec{\rho} \cdot I \cdot \vec{\rho} = I_i \rho_i^2$$

wobei die Flächen mit konstantem F Ellipsoide sind und $F = 1$ der Trägheitsellipsoid ist, so stellt man fest, daß der Gradient von F konstante Richtung und konstanten Betrag hat:

$$\nabla_\rho = 2I \cdot \vec{\rho} = \frac{2I \cdot \vec{\omega}}{\sqrt{2T}} = \sqrt{\frac{2}{T}}\vec{L}$$

außerdem ist die Projektion von $\vec{\rho}$ auf die Richtung von $\vec{L}$ konstant:

$$\frac{\vec{\rho}\vec{L}}{L} = \frac{\vec{\omega}\vec{L}}{L\sqrt{2T}} = \frac{\sqrt{2T}}{L}$$

Nun können wir uns die Bewegung des Trägheitsellipsoids so vorstellen, daß das Zentrum des Ellipsoids konstant über einer Ebene liegt, und sich der Ellipsoid auf dieser Ebene abrollt. Die Kurve auf der Ebene beschreibt die Bewegung von $\vec{\omega}$ im Raumsystem, und die Kurve auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids beschreibt die Bewegung von $\vec{\omega}$ im Körpersystem (*siehe Goldstein S.206*).

Nun haben wir eine Vorstellung, wie sich $\vec{\omega}$ verhällt. Um die Bewegung von $\vec{L}$ im Körpersystem zu erkennen überlegen wir uns,

$$\begin{array}{rcl} T & = & \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \\ L^2 & = & L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \end{array}$$

Die Schnittkurve der Kugel und des Ellipsoids ist die Bahn von $\vec{L}$ im Körpersystem.

Falls wir es mit einem Körper zu tun haben, der zwei gleiche Hauptträgheitsmomente hat, also z.B. $I_1 = I_2$, so kann man die Bewegungsgleichungen Lösen:

$$\begin{array}{rcc} I_1\dot{\omega}_1 & = & \omega_2\omega_3(I_1 - I_3) \\ I_2\dot{\omega}_2 & = & -\omega_3\omega_1(I_1 - I_3) \\ I_3\dot{\omega}_3 & = & 0 \end{array}$$

Man sieht, daß ω_3 eine Konstante ist. Für die anderen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\dot{\omega}1 = -\Omega\omega_2, \qquad \dot{\omega}_2 = \Omega\omega_1$$

wobei Ω die Kreisfrequenz

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$$

ist.

$$\Rightarrow \omega_1 = A\cos\Omega t, \qquad \omega_2 = A\sin\Omega t$$

$$T = \frac{1}{2}I_1A^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2,$$

$$L^2 = I_1^2A^2 + I_3^2\omega_3^2$$

So daß man A und ω_3 aus der Anfangsenergie und dem Betrag des Drehimpulses ermitteln kann.

8 Der schwere symmetrische Kreisel mit einem stationären Punkt

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

$$= \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

$$V = -M\vec{R}\cdot\vec{g} = Mgl\cos\theta$$

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mgl\cos\theta$$

Man sieht sofort, daß die Variablen ϕ und ψ zyklisch sind, und somit ergeben sich die ersten beiden Konstanten der Bewegung.

$$p_\psi = \partial_{\dot{\psi}}L = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_3\omega_3 = I_1a$$

$$p_\phi = \partial_{\dot{\phi}}L = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = I_1b$$

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 + Mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow I_3\dot{\psi} = I_1a - I_3\dot{\phi}\cos\theta,$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{I_1a}{I_3} - \cos\theta\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

Da $I_3\omega_3^2/2$ eine Konstante der Bewegung ist ändert man die Energiegleichung ab in $E' = E - I_3\omega_3^2/2$.

$$E' = \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{I_1}{2}\frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta$$

Mit der Substitution $u = \cos\theta$ erreicht man

$$E'(1 - u^2) = \frac{I_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{I_1}{2}(b - au)^2 + Mglu(1 - u^2)$$

$$\alpha := \frac{2E'}{I_1}, \qquad \beta := \frac{2Mgl}{I_1}$$

$$\Rightarrow \dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

was sofort integriert werden kann.

Damit ist das Problem formal glöst. Für eine Veranschaulichung dieses Resultats betrachte ich die Funktion

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

genauer. Interessant ist das Verhalten dieser Funktion nur für $-1 \leq u \leq 1$, da $u = \cos\theta$. $f(u)$ hat zwei Nullstellen in diesem Bereich, die mit $u_1 \leq u_2$ bezeichnet werden. Dies Bedeutet, daß es zwei Wendepunkte $\theta_1 \geq \theta_2$ gibt. θ nimmt alle Werte zwischen diesen Beiden Winkeln an. Wichtig für das Verhalten des Kreisels ist der Wert von $u' = b/a$, da

$$\dot{\phi} = \frac{b - au}{1 - u^2}$$

ist. Liegt nun u' rechts von u_2, so gilt $\dot{\phi} > 0$ für alle u, und somit präzediert die Figurenachse des Kreisels immer in dieselbe Richtung, wobei die θ-bewegung (Nutation) überlagert ist. Ist $u_1 < u' < u_2$ so gewegt sich die Figurenachse in Schleifen zwischen θ_1 und $\theta 2$ und ist $u' = u_2$, so werden aus den Schleifen Us (*siehe Goldstein S.217*).

Beginnt man nun mit den Anfangswerten, so daß die Figurenachse auf einer Höhe θ_0 festgehalten wird und der Kreisel einen Anfangsdrehimpuls L_3 um die Figurenachse erhält, so gilt $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$:

$$u_0 = u_2 = u' = \frac{b}{a}$$

und die Energie $E' = Mgl\cos\theta_0$. Setzt man nun einen schnellen Kreisel voraus

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3 >> 2Mgl$$

so können einige Approximationen vorgenommen werden. Die Größe der Nutation ist durch $u_1 - u_0$ gegeben, wobei u_1 die andere physikalisch sinnvolle Wurzel aus $f(u)$ ist. Sieht man sich $\alpha = 2E'/I_1$ und $\beta = 2Mgl/I_1$ unter der Bedingung $E' = Mglu_0$ an, so gilt

$$\alpha = \beta u_0.$$

Mit dieser Bedingung und $u_0 = u' = b/a$ kann $f(u)$ umgeformt werden in:

$$f(u) = (1 - u^2)(u_0 - u)\beta - a^2(u_0 - u)^2 = (u_0 - u)(\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u))$$

Die andere Wurzel von $f(u)$ ist durch die quadratische Gleichung

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta}(u_0 - u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + px_1 - q = 0$$

gegeben, mit

$$\begin{array}{rcl} x &=& u_0 - u \\ x_1 &=& u_0 - u_1 \\ p &=& (a^2/\beta) - 2\cos\theta_0 = (a^2/\beta) - 2u_0 \\ q &=& \sin^2\theta_0 = (1 - u_0^2) \end{array}$$

Die Bedingung, daß es sich um einen schnellen Kreisel handelt impliziert $p >> q$, was durch

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\omega_3\right)^2 / \left(\frac{2Mgl}{I_1}\right) = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3\omega_3^2}{2Mgl}$$

In erster Ordnung in der kleinen Größe p/q ist die einzige physikalisch sinnvolle Wurzel von $f(u)$:

$$x_1 = \frac{q}{p}$$

Unter Vernachlässigung von $2\cos\theta_0$ gilt:

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2\theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3}\frac{2Mgl}{I_3\omega_3^2}\sin^2\theta_0.$$

Also verringert sich das Ausmaß der Nutation $x_1 = u_0 - u_1$ wie $1/\omega_3^2$. Um so schneller der Kreisel gedreht wird, desto kleiner ist die Nutationsbewegung. Weil die Nutationsbewegung bei einem schnellen Kreisel klein ist, kann in $f(u)$ der Term

$$(1-u^2) = \sin\theta \approx \sin\theta_0 = \frac{a^2}{\beta}x_1$$

ersetzt werden. Nun folgt:

$$f(u) = (u_0 - u)(\beta(1-u^2) - a^2(u_0 - u)) = \dot{x}^2 = x(\beta\frac{a^2}{\beta}x_1 - a^2 x) = a^2 x(x_1 - x)$$

Mit der Variablentransformation $y = x - x_1/2$ lautet die Gleichung

$$\dot{y}^2 = a^2\left(\frac{x_1^2}{4} - y^2\right),$$

die sich durch nochmaliges Ableiten zur bekannten Differentialgleichung der harmonischen Schwingung reduziert

$$\ddot{y} = -a^2 y$$

Mit den Anfangsbedingungen $x = 0, t = 0$ lautet die Lösung

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{x_1}{2}(1-\cos at) \\ a & = & I_3\omega_3/I_1 \end{array}$$

Für die Präzessionsbewegung ergibt sich

$$\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2\theta} \approx \frac{ax}{\sin^2\theta_0} = \frac{\beta}{2a}(1-\cos at)$$

Die Präzessionsfrequenz ist nicht gleichförmig, sondern variiert harmonisch mit der Zeit. Im Mittel gilt aber

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

Diese letzte Beziehung ist in vektorieller Schreibweise gleichbedeutend mit

$$\begin{array}{rcl} \vec{N} & = & \vec{R} \times M\vec{g} \\ \vec{N} & = & \vec{\omega}_P \times \vec{L}_3 \end{array}$$

Wobei $\vec{L}_3$ der Drehimpuls entlang der Figurenachse ist.

Ein weiterer interessanter fall ist der, daß der Kreisel mit $u_0 = 1 \Leftrightarrow \theta_0 = 0$ gestartet wird. In diesem fall gilt

$$E' = E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = Mgl,$$

und es folgt, daß α und β gleich sind. Die Energiegleichung kann deshalb an jedem Punkt als

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)\beta(1-u) - a^2(1-u)^2 = (1-u)^2\{\beta(1+u) - a^2\}$$

geschrieben werden. Und die dritte Wurzel u_3 ist

$$u_3 = \frac{a^2}{\beta - 1},$$

so daß falls $a^2/\beta > 2 \Rightarrow u_3 > 1$ nur die eine Lösung $u = 1$ erlaubt ist. Der Kreisel dreht sich immer um die vertikale Achse (Bedingung für einen schnellen Kreisel).

Bei einer kritischen Frequenz ω' bei der $u_3 \leq 1$ wird, wird Nutation möglich

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3 \omega'^2}{2Mgl} = 2$$

oder

$$\omega'^2 = 4\frac{MglI_1}{I_3^2}.$$

9 Präzession der Equinoxes

Wäre die Erde eine perfekte Kugel, so könnten die anderen Himmelskörper keine Drehmomente auf sie ausüben, da die Erde aber eher einem Rotationsellipsoid ähnelt können Drehmomente wirken. Das Gravitationspotential der Erde in Bezug auf einen Himmelskörper ist

$$V = -GM \int_V \mathrm{d}V' \frac{\rho(r', \psi, \phi)}{r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)\cos\psi}}$$

Wobei M die Masse des anderen Himmelskörpers, r der Abstand des Massezentrums der Erde vom Himmelskörper und r' der Abstand des Volumenelements $\mathrm{d}V'$ vom Schwerpunkt der Erde. Der Nenner ist die generierende Funktion der Legendrepolynome. Hier sind die ersten drei.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} V &= -GM \sum_{n=0}^{\infty} \int_V \mathrm{d}V' \rho(r', \psi, \phi)(r'/r)^n P_n(\cos\psi) \\ &= -GM \sum_{n=0}^{\infty} \int r'^2 \mathrm{d}r' (r'/r)^n \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\psi) P_n(\cos\psi) \rho(r', \psi, \phi) \end{aligned}$$

Bei einer rein radialen Dichteverteilung $\rho = \rho(r)$ ergibt sich durch die orthogonalitätseigenschaft der Legendrepolynome, daß nur der $n = 0$ beitrag nicht verschwindet. Bei leichten abweichungen von der sphärischen Geometrie erwartet man erwarten, daß die Terme mit $n > 0$ schnell kleiner werden. Für $n = 1$ ergibt sich

$$-\frac{GM}{r^2} m_i r_i' \cos\psi_i = \frac{GM}{r^3} \vec{r} \cdot m_i \vec{r}_i' = 0$$

weil nach Summation über die Masseelemente der zweite Faktor im Skalarprodukt der Schwerpunktsvektor im Schwerpunktssystem, also der Nullvektor, ist.

Der nächste Term für $n = 2$ kann als

$$\frac{GM}{2r^3} m_i r_i^2 (1 - 3\cos^2\psi_i)$$

geschrieben werden. In dyadischer Form schreibt sich $(r_i \cos\psi_i)^2$ als $(\vec{r} \cdot \vec{r}_i' \vec{r}_i' \cdot \vec{\ })/r^2$, so daß sich der $n = 2$ Term ergibt:

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{2r^5} m_i \vec{r} \cdot [r_i'^2 \mathbf{1} - \vec{r}_i' \vec{r}_i'] \cdot \vec{r} - \frac{GM}{r^3} m_i r_i'^2 = \frac{3}{2} \frac{GM}{2r^5} \vec{r} \cdot I \cdot \vec{r} - \frac{GM}{2r^3} \mathrm{Tr} I$$

und die komplette approximation des nichtsphärischen Potentials ist

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}(3I_r - \mathrm{Tr}I)$$

Ist nun $I_1 = I_2$ und bezeichnet man die Richtungscosinuse von $\vec{r}$ als α, β, γ im Hauptachsensystem des starren Körpers so gilt

$$I_r = I_1(\alpha^2 + \beta^2) + I_3\gamma^2 = I_1 + (I_3 - I_1)\gamma^2,$$

so daß sich das Potential als

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}[3\gamma^2 - 1] = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\gamma).$$

schreiben läßt. Der zweite Term ist der einzige, der von der Orientierung des Körpers im Raum abhängt, und somit der einzige Term der Anlaß zu Drehmomenten geben kann. Da sich nun γ bei der Bewegung des Himmelskörpers relativ zur Erde ändert wird über eine Umlaufperiode gemittelt (*siehe Goldstein S.229*) und unter Verwendung des Winkels θ, der die Neigung der Figurenachse der Erde gegenüber der Normalen der Ebene in der der Himmelskörper Läuft, mißt, ergibt sich

$$\bar{V_2} = -\frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\cos\theta),$$

also genau der V_2 Term von oben mit umgekehrtem Vorzeichen.

Die Präzessionsbewegung könnte man nun mittels der Formel $\vec{\omega}_P \times \vec{L}_3 = \vec{N}$ ausrechnen:

$$\omega_p I_3 \omega_3 \sin\theta = -\partial_\theta V \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \dot{\phi} = \frac{1}{I_3\omega_3} \frac{\partial V}{\partial \cos\theta}$$

oder, weil dieses Kraftfeld kein konstantes Feld ist kann man sich auch durch die Lagrangegleichung überzeugen:

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - V(\cos\theta)$$

Wenn wir nur an der gleichförmigen Präzession interessiert sind, und uns keine Gedanken über die notwendigen Anfangsbedingungen machen, können wir $\dot{\theta}$ und $\ddot{\theta}$ Null setzen. Die zu θ gehörige Lagrangegleichung ist dann:

$$\partial_\theta L = I_1 \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_2 \dot{\phi} \sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) - \partial_\theta V = 0$$

Für die langsame Präzession im Vergleich zur Umlauffrequenz ist $\dot{\phi} << \omega_3$ und man kann den $\dot{\phi}^2$ Term vernachlässigen. Es ergibt sich dann wie oben

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_3\omega_3} \frac{\partial V}{\partial \cos\theta}$$

Die Präzessionsfrequenz ist also

$$\dot{\phi} = -\frac{3GM}{2\omega_3 r^3} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos\theta$$

Mit dem Kepplergesetz:

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{r^3}$$

kann man dieses Ergebnis nochmals Umformen zu

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = -\frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\omega_3} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos\theta$$

Dieselben Überlegungen können auch auf Sateliten im Erdgravitationsfeld angewandt werden und führen dann auf das Ergebnis, daß sich die Ebene, in der der Satelit die Erde Umkreiset um die Figurenachse der Erde dreht.

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{mr^2} \cos\theta$$

Wobei m die Erdmasse und τ die Umlaufzeit des Satelliten ist. wenn man für $I_3 = (1/3)mR^2$ einsetzt (für eine Kugel würde $I_3 = (2/5)mR^2$ gelten), so erhält man

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{1}{2} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$