

## x.0 Schwingungen am Beispiel eines elektrischen Schwingkreises

Man erhält die Impedanz einer Spule bzw. eines Kondensators auf folgende Weise: Die Spannung an einem Kondensator ist gegeben durch  $U = Q/C$ . Ableiten nach der Zeit ergibt  $\dot{U} = I/C \Rightarrow I = C\dot{U}$ . War nun  $U$  gegeben durch  $U = U_0 e^{i\omega t}$ , so gilt:

$$I(t) = i\omega C \cdot U(t) \Rightarrow U(t) = \frac{-i}{\omega C} I(t)$$

$$X_C := \frac{-i}{\omega C}$$

entsprechend erhält man für eine Spule mit  $U = -LdI/dt$ :

$$X_L := i\omega L$$

Hat man nun einen Serienschwingkreis gegeben, der von einer externen Spannungsquelle mit einer Frequenz  $f$  getrieben wird, so gilt folgende Differentialgleichung, die das zweite Kirchhoffsche-Gesetz (Maschenregel) widerspiegelt:

$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} &= U_0 e^{i\omega t} \\ L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} &= U_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{Q} + (R/L)\dot{Q} + \frac{Q}{LC} &= (U_0/L)e^{i\omega t} \\ \ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q &= (U_0/L)e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Nimmt man als Lösung an, daß das schwingende System mit der gleichen Frequenz wie der Erreger antwortet, und setzt  $Q = Q_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{Q}_0 e^{i\omega t}$ , so erhält man:

$$\hat{Q}_0(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = U_0/L \quad (1)$$

Die Komplexe Zahl in Klammern, die in "karthesischen Koordinaten" gegeben ist ersetzt man durch Polarkoordinatenform:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \cdot e^{i\rho} \quad \text{mit } \tan \rho = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Nun erhält man für  $\hat{Q}_0$ :

$$\hat{Q}_0 = \frac{U_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cdot e^{-i\rho}$$

Vergleicht man  $\hat{Q}_0$  mit weiter oben, so sieht man, daß  $\varphi = -\rho$  ist und deshalb gilt:

$$\tan \varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Das System schwingt hinter dem Erreger her, oder der Erreger ist dem Schwingenden System in seiner Phase voraus.

Die Resonanzfrequenz erhält man bei einem Maximum von  $\hat{Q}_0$ , was aber gleichbedeutend ist mit einem Minimum des Zählers.

$$\min \left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2 \right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

Den Strom im Schwingkreis erhält man durch ableiten der Ladung nach der Zeit. So erhält man für den Strom:

$$I = \dot{Q} = i\omega Q_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi + \pi/2)}$$

$$\hat{Q}_0 = \frac{U_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cdot e^{i\varphi} = \frac{U_0}{\omega \underbrace{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \omega^2 R^2}}_{\sqrt{Z^2}}} = I_0/i\omega$$

Die zweite Zeile ist nicht verwunderlich, da man den Strom in einem Schwingkreis erhält, wenn man die Spannung durch den Widerstand dividiert. Da wir es mit komplexen Widerständen zu tun haben erhält die Gleichung dieses Aussehen.

Sehen wir nun, was passiert, wenn wir keine äußere treibende Kraft haben. Gleichung (1) ändert sich dadurch, das  $U_0 = 0$  ist. Damit erhalten wir als Bedingung für  $\omega$ :

$$-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$$

Man erhält durch anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$\omega_{1,2} = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} \tag{2}$$

$$Q(t)_{1,2} = Q_0 e^{i\omega t} = Q_0 e^{i\left(i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}\right)t}$$

$$= Q_0 e^{(\gamma/2)t} e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}t}$$

Man sieht, daß das System nun mit der Frequenz  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$  schwingt.

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man den komplexen Widerstand des Schwingkreises null setzt.

$$X_L + X_C + R = 0$$

$$i\omega L - \frac{i}{\omega C} + R = 0 \quad | \cdot \omega C$$

$$i\omega^2 LC - i + \omega RC = 0 \quad | \cdot i$$

$$-\omega^2 LC + 1 + i\omega RC = 0 \quad | : LC$$

$$-\omega^2 + \frac{1}{LC} + i\frac{R}{L}\omega = 0$$

$$-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$$

Das System schwingt mit der Frequenz bei dem es den niedrigsten Widerstand besitzt.

1. Frage bleibt, wieso sind die Resonanzfrequenz und die neue Eigenfrequenz unterschiedlich?

Die Phasenverschiebung des Stromes ist  $\varphi + \pi/2$ , d.h zwischen Strom im Schwingkreis und Ladung auf dem Kondensator ist eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$ . Mit einer Umformung erhält man:

$$\tan(\varphi + \pi/2) = -\cot \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega}$$

$$I(t) = U/Z = (U_0/|Z|) \cdot e^{i(\omega t + \varphi + \pi/2)} = (U_0/|Z|) \cdot e^{i(\omega t - \theta)} \quad \text{mit } Z = |Z|e^{i\theta}, \theta = -(\varphi + \pi/2)$$

“Der Tangens des Winkels der Impedanz” ist gleich dem Cotangens des Winkels der Phasenverschiebung von Spannung der Stromquelle und Ladung am Kondensator.

Die Spannung am Kondensator erhält man durch:

$$U_C = I * X_C = X_C * U/Z = \frac{U_0}{\sqrt{(2\pi fRC)^2 + (f^2/f_0^2 - 1)^2}} \cdot e^{i\omega t}$$

Die gemittelte Leistung, die verbraucht wird ist:

$$\bar{P} = U(t)I(t) = U_0 I_0 \overline{\sin(\omega t) \sin(\omega t - \theta)} = U_0 I_0 \overline{\sin^2(\omega t)} \cdot \cos -\theta = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cdot \cos \theta$$

mit  $\cos \theta = R/|Z|$  und  $U_0 = I_0 * |Z|$  erhält man:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \cdot R = I_{\text{eff}}^2 \cdot R$$

Die gesamte Leistung fällt am Widerstand ab. Der Schwingkreis zieht zwar eine maximale Leistung aber über die Zeit gemittelt ist diese null.