$$
\begin{aligned}
(\operatorname{grad} U)_C &= \partial_x U \vec{e}_x + \partial_y U \vec{e}_y + \partial_z U \vec{e}_z \\
(\operatorname{grad} U)_Z &= \partial_\rho U \vec{e}_\rho + 1/\rho\, \partial_\varphi U \vec{e}_\varphi + \partial_z U \vec{e}_z \\
(\operatorname{grad} U)_K &= \partial_r U \vec{e}_r + 1/r\, \partial_\vartheta U \vec{e}_\vartheta + (1/r \sin\vartheta) \partial_\varphi U \vec{e}_\varphi \\
(\textit{allgemein}) &= (1/|\partial_\xi \vec{r}|)\partial_\xi U \vec{e}_\xi + (1/|\partial_\eta \vec{r}|)\partial_\eta U \vec{e}_\eta + (1/|\partial_\zeta \vec{r}|)\partial_\zeta U \vec{e}_\zeta
\end{aligned}
$$

mit allgemein sind allgemein orthonormierte Koordinaten gemeint.

Definition 1.1: Vektorgradient:

$$
\begin{aligned}
((\vec{a} \operatorname{grad})\vec{V})_C &= (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} V_x)\vec{e}_x + (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} V_y)\vec{e}_y + (\vec{a} \cdot \operatorname{grad} V_z)\vec{e}_z \\
(\vec{a} \operatorname{grad})\vec{V} &= (1/2)(\operatorname{rot}(\vec{V} \times \vec{a}) + \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{V}) + \vec{a} \operatorname{div} \vec{V} - \vec{V} \operatorname{div} \vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{V} \times \operatorname{rot} \vec{a})
\end{aligned}
$$

Einige Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} \varphi(U) &= (\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}U) \operatorname{grad} U \\
\operatorname{grad}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) &= (\vec{V}_1 \operatorname{grad})\vec{V}_2 + (\vec{V}_2 \operatorname{grad})\vec{V}_1 + \vec{V}_1 \times \operatorname{rot} \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \times \operatorname{rot} \vec{V}_1 \\
\operatorname{grad}(\vec{r} \cdot \vec{c}) &= \vec{c} \qquad \text{mit } \vec{c} = \textit{const} \\
\operatorname{grad} U(r) &= U'(r)\vec{r}/r
\end{aligned}
$$

2 Divergenz

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div} \vec{V})_C &= \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z \\
(\operatorname{div} \vec{V})_Z &= (1/\rho)\partial_\rho(\rho V_\rho) + (1/\rho)\partial_\varphi V_\varphi + \partial_z V_z \\
(\operatorname{div} \vec{V})_K &= (1/r^2)\partial_r(r^2 V_r) + (1/r \sin\vartheta)\partial_\vartheta(\sin\vartheta V_\vartheta) + (1/r\sin\vartheta)\partial_\varphi V_\varphi \\
(\textit{allgemein}) &= (1/D)\{\partial_\xi(|\partial_\eta \vec{r}|\,|\partial_\zeta \vec{r}|\, V_\xi) + \partial_\eta(|\partial_\xi \vec{r}|\,|\partial_\zeta \vec{r}|\, V_\eta) + \partial_\zeta(|\partial_\xi \vec{r}|\,|\partial_\eta \vec{r}|\, V_\zeta)\}
\end{aligned}
$$

mit D der Funktionaldeterminante $\partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \zeta)$.
Einige Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(U\vec{V}) &= U \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \operatorname{grad} U \\
\operatorname{div}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) &= \vec{V}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{V}_2 \\
\operatorname{div}(\varphi(r)\vec{r}) &= 3\varphi(r) + r\varphi'(r)
\end{aligned}
$$

3 Rotation

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \vec{V})_C &= (\partial_y V_z - \partial_z V_y)\vec{e}_x + (\partial_z V_x - \partial_x V_z)\vec{e}_y + (\partial_x V_y - \partial_y V_x)\vec{e}_z \\
(\operatorname{rot} \vec{V})_Z &= ((1/\rho)\partial_\varphi V_z - \partial_z V_\varphi)\vec{e}_\rho + (\partial_z V_\varphi - \partial_\rho V_z)\vec{e}_\varphi + (1/\rho)(\partial_\rho(\rho V_\varphi) - \partial_\varphi V_\rho)\vec{e}_z \\
(\operatorname{rot} \vec{V})_K &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\{\partial_\vartheta(\sin\vartheta V_\varphi) - \partial_\varphi V_\vartheta\}\vec{e}_r + \{\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi V_r - \frac{1}{r}\partial_r(rV_\varphi)\}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\{\partial_r(rV_\vartheta) - \partial_\vartheta V_r\}\vec{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

Einige Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(U\vec{V}) &= U \operatorname{rot} \vec{V} + \operatorname{grad} U \times \vec{V} \\
\operatorname{rot}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) &= (\vec{V}_2 \operatorname{grad})\vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \operatorname{grad})\vec{V}_2 + \vec{V}_1 \operatorname{div} \vec{V}_2 - \vec{V}_2 \operatorname{div} \vec{V}_1 \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}
\end{aligned}
$$

4 Laplace

$$
\begin{aligned}
(\Delta U)_C &= \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U \\
(\Delta U)_Z &= (1/\rho)\partial_\rho(\rho\partial_\rho U) + (1/\rho^2)\partial_\varphi^2 U + \partial_z^2 U \\
(\Delta U)_K &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r U) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta U) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2 U \\
(\textit{allgemein}) &= \frac{1}{D}\left\{\partial_\xi\left(\frac{D}{|\partial_\xi\vec{r}|^2}\partial_\xi U\right) + \partial_\eta\left(\frac{D}{|\partial_\eta\vec{r}|^2}\partial_\eta U\right) + \partial_\zeta\left(\frac{D}{|\partial_\zeta\vec{r}|^2}\partial_\zeta U\right)\right\}
\end{aligned}
$$

5 Potential

Notwendige und hinreichende Vorraussetzung für die Existenz eines Potentials U zu einem Vektorfeld $\vec{V}$ ist:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0$$

Sei $\operatorname{div} \vec{V} =: q(\vec{r})$ dann folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= -\operatorname{grad} U \text{ mit} \\
U(\vec{r}) &= -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{r}} \vec{V} \mathrm{d}\vec{x} \text{ oder} \\
\Delta U &= -q(\vec{r}) \qquad \text{POISSONsche Differentialgleichung} \\
\Rightarrow U(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{q(\vec{r}^*)}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \mathrm{d}V(\vec{r}^*)
\end{aligned}$$

Wobei bei der letzten Integration V und $\mathrm{d}V$ ein 3dim Volument bzw. ein Volumenelement bedeuten. U ist bis auf eine Konstante $\hat{U} = U + U_0$ eindeutig bestimmt.

6 Vektorpotential

Notwendige und hinreichende Vorraussetzung für die Existenz eines Vektorpotentials $\vec{A}$ zu einem Vektorfeld V ist:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Sei $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{w}(\vec{r})$ dann folgt $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ und:

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \\
\vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^1 u\{\vec{V}(\vec{y}(u)) \times \vec{t}\}\mathrm{d}u \text{ mit} \\
\vec{y}(u) &= \vec{y}_0 + \vec{t}u \text{ mit } \vec{t} = \vec{r} - \vec{y}_0
\end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ gelangt man zu

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \vec{w}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\vec{w}$$

Dies entspricht formal der POISSONschen Differentialgleichung, weswegen $\vec{A}$ als Vektorpotential bezeichnet wird.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{w}(\vec{r}^*)}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} \mathrm{d}V(\vec{r}^*)$$

$\vec{A}$ ist bis auf ein Eichpotential $\vec{A}^* = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$ eindeutig bestimmt.

7 Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Die hier besprochenen Dgln sind von der Form:

$$T\Psi = a\dot{\Psi} \quad \text{bzw.} \quad T\Psi = a\ddot{\Psi} \quad \text{mit}$$

$$T\Psi = \Delta\,\Psi - V\Psi$$

Gleichungen diesen Typs sind u.a. die Wellengleichung, die Wärmeleitungsgleichung, die Klein-Gordon-Gleichung und die Schrödinger-Gleichung. Das Problem wird folgendermaßen gelöst. Durch Separationsansätze werden spezielle Produktlösungen gefunden. Anschließend werden durch Reihenbildung weitere Lösungen angegeben, und es wird gezeigt, daß sich alle Lösungen als solche Reihen darstellen lassen (Entwicklungsproblem). Damit ist das Problem vollständig gelöst.

Als erstes wird die Zeit absepariert, so daß man zu einer zeitunabhängigen Gleichung gelangt. Ansatz:

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}) \cdot \alpha(t)$$

$$\begin{array}{rcl} T(\psi\alpha) = a\partial_t(\psi\alpha) & \Leftrightarrow & \alpha(T\psi) = a\psi\dot{\alpha} \Leftrightarrow \\ \dfrac{T\psi}{\psi} & = & a\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha} \\ \text{oder} \quad \dfrac{T\psi}{\psi} & = & a\dfrac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \end{array}$$

Da ψ und α Funktionen verschiedener unabhängiger Variablen sind ist diese Bedingung nur zu erfüllen, falls linke und rechte Seite konstant sind. Hierbei führt man einen Separationsparameter $-E$ ein. Dabei bleibt die zeitunabhängige Gleichung zuerst ungelöst, als

$$T\psi + E\psi = 0$$

stehen, aber für die Zeitgleichung kann die Lösung angegeben werden:

$$\alpha(t) = c\, e^{(-E/a)t} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rl} \alpha(t) & = c_1\, e^{i\sqrt{E/a}t} + c_2\, e^{-i\sqrt{E/a}t} \quad \text{bzw. für } E = 0 \\ & = c_1 + c_2 t \end{array}$$

Der Nächste Schritt ist die Separation der zeitunabhängigen Dgl in einer dem Problem angepaßten Geometrie.

1. Zylinderkoordinaten

Falls das Potential V unabhängig von der z-Koordinate ist wird der selbe Ansatz wie bei der Zeitseparation verwendet:

$$\tilde{\psi}(x,y,z) = \psi(x,y)\alpha(z) \quad \Rightarrow \quad \alpha(z) = c\, e^{-kz}$$

$$\Delta_P\psi + (\tilde{E} - V(x,y))\psi = 0$$

Hierbei bedeutet Δ_P Laplaceoperator in ebenen Polarkoordinaten, und $\tilde{E} = (E + k)$.

2. Ebene Polarkoordinaten

Ist nun das Potential $V(x,y) = V(\rho)$, so geht man auf Polarkoordinaten über:

$$(1/\rho)\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi) + (1/\rho^2)\partial_\varphi\psi + (E - V(\rho))\psi = 0$$

Mit dem Separationsansatz $\psi(\rho,\varphi) = f(\rho)Y(\varphi)$ erhält man mit dem Separationsparameter λ:

$$\begin{array}{rl} Y(\varphi) & = c_1\, e^{i\sqrt{\lambda}t} + c_2\, e^{-i\sqrt{\lambda}t} \quad \text{bzw. für } \lambda = 0 \\ & = c_1 + c_2 t \end{array}$$

Da $Y(\varphi)$ in den meisten fällen 2π-periodisch sein muß (wenn die Lösung auf Kreisringen existieren soll!), ergibt sich als Nebenbedingung

$$\lambda = n^2 \quad \text{für} \quad n \in N_0$$

Also muß nur noch die radiale Gleichung gelöst werden:

$$f'' + (1/\rho)f' + (E - V - (\lambda/\rho^2))f = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = n^2$$

Für $V = 0$ und $E > 0$ kann diese Dgl durch die Substitution $r = \sqrt{E}\rho$ in die ganzzahlige Besselsche Dgl übergeführt werden:

$$f'' + (1/r)f' + (1 - (n/r)^2)f = 0$$

Die Lösungen dieser Dgl heißen *Zylinderfunktionen*.

3. Kugelkoordinaten

$$\Delta\,\psi + (E - V(r))\psi = 0$$

Ansatz:

$$\psi = f(r)Y(\varphi, \vartheta)$$

Mit dem Separationsparameter λ ergeben sich die beiden Dgln für f und Y:

$$(r^2 f')' + (r^2(E - V(r)) - \lambda)f = 0$$

und

$$\Delta_{S^2} Y + \lambda Y = 0 \Leftrightarrow ((1/\sin^2\vartheta)\partial_\varphi^2 + (1/\sin\vartheta)\partial_\vartheta \sin\vartheta\partial_\vartheta)Y + \lambda Y = 0$$

Weitere Separation mit dem Ansatz $Y(\varphi, \vartheta) = \phi(\varphi)\theta(\vartheta)$ liefert mit dem Separationsparameter μ:

$$\phi'' + \mu\phi = 0 \qquad \sin\vartheta(\sin\vartheta\theta')' + (\lambda\sin^2\vartheta - \mu)\theta = 0$$

Mit dem gleichen Argument wie oben, weil ϕ 2π-periodisch sein muß, folgt wiederum:

$$\mu = m^2 \quad \text{mit} \quad m \in N_0$$

Die θ-Gleichung interessiert nur für $0 < \vartheta < \pi$ und geht durch $\xi = \cos\vartheta$ in das Intervall $-1 < \xi < 1$ über.

$$(1 - \xi^2)u'' - 2\xi u' + (\lambda - (m^2/1 - \xi^2))u = 0$$

mit $u(\xi) = \theta(\vartheta)$ heißt (allgemeine) Legendre Dgl. Wie sich später zeigen wird muß $\lambda = l(l+1)$ und $l \geq m$ da Y auch an den Polen zweimal stetig differenzierbar sein muß. Die Spezialisierung auf $m = 0$ heißt (spezielle) Legendre Dgl:

$$(1 - \xi^2)u'' - 2\xi u' + l(l+1)u = 0 \quad \text{mit} \quad l \geq 0$$

Die radiale Gleichung lautet dann:

$$(r^2 f')' + (r^2(E - V(r)) - l(l+1))f = 0$$

oder

$$f'' + (2/r)f' + (E - V - (l(l+1)/r^2))f = 0$$

Mit den Transformationen $\rho = \sqrt{E}r$ (damit gilt $E = 1$) und $w = \sqrt{\rho}f$ geht der Spezialfall $V = 0$ in die halbzahlige Bessel'sche Dgl über:

$$w'' + (1/\rho)w' + (1 - ((l + 1/2)/\rho)^2)w = 0$$

8 Lösung der Legendre Dgl

Mittels Potenzreihenansatz erhält man die Rekursionsformel:

$$u_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} u_m$$

Damit diese Reihe abbricht und somit auch für $r \to \infty$ eine Lösung darstellt, muß $\lambda = l(l+1)$ mit $l \geq 0$ gelten. Die Lösungen heißen Legendrepolynome und haben die Gestallt:

$$P_l(z) = u_0 + u_2 z^2 + ... + u_{2k} z^{2k} \quad \text{falls} \quad l = 2k$$

$$P_l(z) = u_1 z + u_3 z^3 + ... + u_{2k+1} z^{2k+1} \quad \text{falls} \quad l = 2k+1$$

Für $l \in N_0$ und die Normierungsbedingung $P(1) = 1$ sind die Legendrepolynome durch die Rekursionsformel eindeutig bestimmt.

$$\begin{array}{lll lll} P_0 & = & 1 & \qquad P_1 & = & z \\ P_2 & = & (1/2)(3z^2 - 1) & \qquad P_3 & = & (1/2)(5z^3 - 3z) \\ P_4 & = & (1/8)(35z^4 - 30z^2 + 3) & \qquad P_5 & = & (1/8)(63z^5 - 70z^3 + 15z) \end{array}$$

Korollar: *Die Eigenwertaufgabe für $m = 0$ (nämlich: Für welche λ ("Eigenwerte") gibt es nichttriviale Lösungen ("Eigenfunktionen") der Gleichung $(1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$ auf dem Intervall $]-1;1[$, welche an den Intervallenden Grenzwerte besitzen?) hat die folgende Lösung: Eigenwerte sind genau die Zahlen $\lambda = l(l+1)$ für $l \geq 0$ ganz, und das Legendrepolynom $P_l(z)$ ist bis auf einen konstanten Faktor die einzige Eigenfunktion zum Eigenwert $l(l+1)$.*

Die Formel von RODRIGUEZ bietet eine einfache Darstellung der Legendrepolynome:

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^l} (z^2 - 1)^l$$

Es gilt:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x) P_n(x) \mathrm{d}x = \delta_{kn} \frac{1}{n + 1/2}$$

Einschub: Orthogonalpolynome $< f, g >_r := \int_I f(x) g(x) r(x) \mathrm{d}x$

Intervall	Gewichtsfunktion $r(x)$	Orthogonalpolynome
$[-1;1]$	1	Legendre-Polynome
$[0;\infty[$	e^{-x}	Laguerre-Polynome
$]-\infty;\infty[$	e^{-x^2}	Hermite-Polynome
$]-1;1[$	$1/\sqrt{1-x^2}$	Tschebyscheff-Polynome

Für quadratintegrierbare Funktionen $< f, f >_r$ gilt jeweils:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} < f, p_n >_r p_n$$

Zugeordnete Legendrepolynome:

$$P_l^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} f(z)$$

mit einem Polynom $f(z)$ dessen Koeffizienten die Rekursionsformel:

$$u_{n+2} = \frac{(m+n)(m+n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} u_n, \quad n \in N_0, \quad m \in N_0$$

erfüllen, oder

$$P_l^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} P_l^{(m)}(z)$$

wobei die rechte Seite die m-te Ableitung bedeutet.

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_l^m(x)\mathrm{d}x = (1/l+\frac{1}{2})\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad 0 \le m \le l$$
$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für} \quad l \neq k, \quad 0 \le m,n \le l$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2} P_l^m(x)P_l^n(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n$$

Man kann P_l^m auch für negatives m definieren durch

$$P_l^m(z) = \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}z^{l+m}}(z^2-1)^l$$
$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z)$$

9 Kugelflächenfunktionen

$$Y(\varphi,\vartheta) = P_l^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \quad |m| \le l$$

normiert auf $||Y|| = 1$:

$$< f,g >= \int_{S^2} fg^* dF = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\vartheta)g^*(\varphi,\vartheta)\sin\vartheta d\varphi d\vartheta$$
$$||f|| := \sqrt{< f,f >}$$
$$||P_l^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}|| = \sqrt{\frac{2\pi}{l+1/2}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}$$
$$\Rightarrow Y_l^m := (-1)^m \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\varphi}$$
$$Y_l^{-m} := (-1)^m Y_l^{m*}$$

für $0 \le m \le l$

$$< Y_l^m, Y_k^n >= \delta_{mn}\delta lk$$

Um Formeln zu vereinfachen definiere P_l^m auch für negatives m wie oben.

$$Y_l^m := (-1)^m \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \quad -l \le m \le l$$

Entwickelbarkeit einer Funktion auf S^2:

$$f = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} < f, Y_l^m >_{S^2} Y_l^m$$

im quadratischen Mittel. Ist f zweimal stetig differenzierbar, so ist Konvergenz absolut und gleichmäßig.
Korollar: *Die Eigenwerte der "Kugelflächenfunktionsaufgabe"* $\Delta_{S^2}Y + \lambda Y = 0$ *sind genau die Zahlen* $\lambda = l(l+1), l \ge 0$ *ganz. Zu jedem anderen* λ *gibt es nur die triviale Kugelflächenfunktion* $Y = 0$.

10 Räumliche Kugelfunktionen

Auf die Räumlichen Kugelfunktionen stößt man, wenn man im Separationsansatz für Kugelkoordinaten $E = V = 0$ setzt und die radiale Gleichung löst. Die Lösungen heißen dann Kugelfunktionen.

Unter einer räumlichen Kugelfuntkion versteht man:
Sei $l \geq 0$ ganz. Sind Y_l und $Y_{-(l+1)}$ irgendwelche Kugelflächenfunktionen vom Grade l, so heißen die Funktionen $Y_l r^l$ und $Y_{-(l+1)} r^{-(l+1)}$ räumliche Kugelfunktionen vom Grade l bzw. $-(l+1)$. Räumliche Kugelfunktionen sind wie der Separationsansatz zeigt, stets harmonisch für $r \neq 0$.

Satz 10.1: Der Limes einer lokal glm. konvergenten Folge oder Reihe von harmonischen Funktionen ist selbst wieder harmonisch:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n r^n$$

Satz 10.2: Ist $0 < r_1 < r_2$, und sind f_1 und f_2 zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf den Sphären vom Radius r_1 bzw. r_2, so gibt es genau eine "Laurantreihe"

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n r^n$$

von räumlichen Kugelfunktionen die auf der abgeschlossenen Kugelschale $r_1 \leq r \leq r_2$ gleichmäßig konvergiert, so daß die Grenzfunktion ψ auf dem Rande mit f_1, f_2, übereinstimmt.

Korollar: *Jede in einer Kugelschale $\rho_1 < r < \rho_2$ harmonische Funktion läßt sich eindeutig in eine lokal gleichmäßig konvergente "Laurentreihe"*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n r^n$$

von räumlichen Kugelfunktionen entwickeln.

Erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta) r^n, && r<1 \\
\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta) r^{-(n+1)}, && r>1 \\
\frac{1}{\sqrt{1-2\xi z+z^2}} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) z^n, && |z|<1
\end{aligned}$$

11 Zylinderfunktionen

$$w'' + (1/z)w' + (1-(\nu/z)^2)w = 0$$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

$$J_\nu(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Für ganzzahliges $n \in Z$ gilt: $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, d.h. J_{-n} ist linear abhängig von $J_n(z)$. Ansonsten bilden J_{-n}, J_n ein Fundamentalsystem der Besselschen Dgl.

$$N_\nu(z) := \frac{1}{\sin\nu\pi}(J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z))$$

heißt Neumannfunktion. Besselfunktion und Neumannfunktion bilden stets ein Fundamentalsystem.

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)} &:= J_\nu + iN_\nu \\
H_\nu^{(2)} &:= J_\nu - iN_\nu
\end{aligned}$$

sind die beiden Hankelfunktionen, die ebenfalls ein Fundamentalsystem der Besseldifferntialgleichung sind.

Entwicklung der 2dim ebenen Welle nach Polarkoordinaten:

$$\begin{array}{rcll} e^{(z/2)(\zeta-1/\zeta)} & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\zeta^n, & z\in\mathcal{C}, \zeta\in\mathcal{C}, \zeta\neq 0 \\ e^{iy} & = & e^{ir\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\varphi} & \\ \cos(r\sin\varphi) & = & 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(r)\sin[(2k+1)\varphi] & \\ J_n(r) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(r\sin t - nt)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(r\sin t - nt)\mathrm{d}t, & n\in Z \end{array}$$

Entwicklung der 3dim ebenen Welle nach Kugelfunktionen:

$$\Delta\,\psi + \psi = 0$$

im Raum führt zur halbzahligen Besselschen Dgl. $J_{l+1/2}, J_{-(l+1/2)}$ bilden ein Fundamentalsystem. Aber dies sind noch nicht die gesuchten radialen Lösungen, erst nach der Rücktransformation $f = (1/\sqrt{r})w$ erhalten wir die radialen Lösungen:

$$f(r) = a_l\frac{1}{\sqrt{r}}J_{l+1/2}(r) + b_l\frac{1}{\sqrt{r}}J_{-(l+1/2)}(r)$$

zum Eigenwert $\lambda = l(l+1)$.

Definition : Sphärische Besselfunktion

$$\begin{array}{rcl} j_n(r) := & & \sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{n+1/2}, \quad n\in Z \\ & = & (1/r)\cos(r-(n+1)\pi/2) + O(r^{-2}) \end{array}$$

Lösungsbasis: $j_l, j_{-(l+1)}$ für $l\geq 0$.
Erfüllt ψ in einer Kugelschale $r_1 < r < r_2$ die Gleichung

$$\Delta\,\psi + \psi = 0$$

so gilt

$$\psi(r,\varphi,\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(r)Y_n(\varphi,\vartheta)$$

mit

$$Y_l(\varphi,\vartheta) = \sum_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m(\varphi,\vartheta)$$

$$Y_{-(l+1)}(\varphi,\vartheta) = \sum_{m=-l}^{l} b_l^m Y_l^m(\varphi,\vartheta)$$

mit eindeutig bestimmten Kugelflächenfunktionen Y_n vom Grad n. $j_n(r)Y_n(\varphi,\vartheta)$ ist für $n\in N_0$ eine (auch am Nullpunkt) beliebig oft differenzierbare Funktion, währen für $n<0$, falls nicht $Y_n = 0$, nicht einmal in einer Umgebung von Null beschränkt sein kann. Diese Entwicklung ist eine Entwicklung nach Kugelfunktionen, da $j_n(r) = r^n h_n(r^2)$, wobei $h_n(z)$ eine gewisse überall konvergente Potenzreihe mit $h_n(0)\neq 0$ bezeichnet, und somit

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(r)Y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n(r^2)r^nY_n$$

Hieraus kann man erkennen, daß es sich tatsächlich um eine Entwicklung nach Kugelfunktionen handelt.

$$e^{ir\cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(r) P_l(\cos\vartheta)$$

$$j_l(r) = \frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{1} e^{ir\xi} P_l(\xi)\mathrm{d}\xi$$

mittels sukzessiver partieller Integration erhält man für $l \geq 0$:

$$j_l(r) = \sum_{m=0}^{l} \frac{(l+m)!}{m!\,2^m(l-m)!} \cdot \frac{\sin(r-(l-m)\pi/2)}{r^{m+1}}$$

$$\begin{aligned}
j_0(r) &= \frac{\sin r}{r} \\
j_1(r) &= -\frac{\cos r}{r} + \frac{\sin r}{r^2} \\
j_2(r) &= -\frac{\sin r}{r} - 3\frac{\cos r}{r^2} + 3\frac{\sin r}{r^3} \\
j_3(r) &= \frac{\cos r}{r} - 6\frac{\sin r}{r^2} - 15\frac{\cos r}{r^3} + 15\frac{\sin r}{r^4} \\
j_4(r) &= \frac{\sin r}{r} + 10\frac{\cos r}{r^2} - 45\frac{\sin r}{r^3} - 105\frac{\cos r}{r^4} + 105\frac{\sin r}{r^5} \\
j_5(r) &= -\frac{\cos r}{r} + 15\frac{\sin r}{r^2} + 105\frac{\cos r}{r^3} - 420\frac{\sin r}{r^4} - 945\frac{\cos r}{r^5} + 945\frac{\sin r}{r^6}
\end{aligned}$$

X Sonstiges

Volumen der n-dim Einheitskugel:

$$\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

Oberfläche der n-dim Einheitskugel:

$$\omega_n = n\tau_n$$