# 1. Die Maxwell'schen Gleichungen und die Grenzbedingungen an Trennflächen.

Die Maxwell'schen Gleichungen in makroskopischer Materie nehmen folgende Form im Gaußschen Einheitensystem an:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} B = 0 & \operatorname{rot} E + \frac{1}{c}\partial_t B = 0 \\ \operatorname{div} D = 4\pi\rho & \operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\partial_t D \\ D = E + 4\pi P & H = B - 4\pi M \\ \epsilon_0 = 1 & \mu_0 = 1 \end{array}$$

Die Lorentz-Kraft pro Einheitsladung lautet $F/q = E + (v/c) \times B$.
In SI-Einheiten lauten sie:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} B = 0 & \operatorname{rot} E + \partial_t B = 0 \\ \operatorname{div} D = \rho & \operatorname{rot} H = j + \partial_t D \\ D = \epsilon_0 E + P & H = \frac{1}{\mu_0} B - M \\ \epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} & \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \end{array}$$

Die Lorentz-Kraft pro Einheitsladung lautet $F/q = E + v \times B$.
Unabhängig von der Wahl des Einheitensystems gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} j + \partial_t \rho = 0$$

und der Zusammenhang zwischen $D, H$ und $E, B$ ist gegeben durch:

$$\begin{array}{c} D = \epsilon_0 E + \lambda P \\ H = \frac{1}{\mu_0} B - \lambda' M \end{array}$$

Wobei $\epsilon_0$ und $\mu_0$ aus der obigen Tabelle ersichtlich ist, und $\lambda = \lambda' = 4\pi$ in den nichtrationalisierten Einheitensystemen wie dem Gaußschen CGS-System und $\lambda = \lambda' = 1$ in den rationalisierten Einheitensystemem wie den SI-Einheiten. Dieser Zusammenhang zwischen $D, H$ und $E, B$ ist immer gegeben, solange die internen Ströme und internen Ladungen die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} j_{in} + \partial_t \rho_{in} = 0$$

erfüllen, da die Lösung dieser Gleichung gegeben ist durch ein Vektorfeld $P$, so daß:

$$j = \partial_t P \qquad \rho = -\operatorname{div} P$$

wobei die Umeichung $P' = P + \operatorname{rot} M$ mit einem statischen Pseudovektorfeld $M$, möglich ist. Es wäre also möglich $M$ völlig wegzueichen, da sich $P$ und $M$ meist aus der Geometrie der Materialen ergeben, und somit eine anschauliche Bedeutung hat.

Die Umrechnung von Gaußschen Einheiten ins SI-System geschieht über folgende Tabelle, in der die Größen der jeweiligen Spalte durch die Größen in der anderen Spalte zu ersetzen sind.

| Größe | Gaußsches CGS-System | SI-System |
|---|---|---|
| Vakuum Lichtgeschwindigkeit | $c$ | $(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ |
| Elektrisches Feld Potential, Spannung | $E(\Phi, V)$ | $\sqrt{4\pi\epsilon_0}E(\Phi, V)$ |
| Dielektrische Verschiebung | $D$ | $\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}D$ |
| Ladungsdichte (Ladung, Stromdichte Stromstärke, Polarisation | $\rho(q, j, I, P)$ | $1/\sqrt{4\pi\epsilon_0}\rho(q, j, I, P)$ |
| Magnetische Induktion | $B$ | $\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}B$ |
| Magnetisches Feld | $H$ | $\sqrt{4\pi\mu_0}H$ |
| Magnetisierung | $M$ | $\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}M$ |
| Leitfähigkeit | $\sigma$ | $\sigma/(4\pi\epsilon_0)$ |
| Dielektr. Konst. | $\epsilon$ | $\epsilon/\epsilon_0$ |
| Permeabilität | $\mu$ | $\mu/\mu_0$ |
| Widerstand Impedanz | $R(Z)$ | $4\pi\epsilon_0 R(Z)$ |
| Induktivität | $L$ | $4\pi\epsilon_0 L$ |
| Kapazität | $C$ | $1/(4\pi\epsilon_0)C$ |

Weiterhin wird in dieser Zusammenfassung das Gaußsche CGS-System verwandt.
Die Grenzbedingungen an den Trennflächen verschiedener Medien in Normalenrichtung ergeben sich jeweils aus den Divergenzgleichungen:

$$\begin{gathered}\operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{div} D = 4\pi\rho\end{gathered}$$

in integraler Darstellung:

$$\begin{gathered}\int_S D \cdot n\mathrm{d}a = 4\pi \int_V \rho \mathrm{d}^3x \\ \int_S B \cdot n\mathrm{d}a = 0\end{gathered}$$

Wählt man nämlich als Volumenelement das aus gleichen Deckflächen zu beiden Seiten der Trennschicht besteht, und bei dem die Deckflächen die Trennfläche tangential berühren, so ergibt die Linke Seite der Gleichungen im Limes $V \to 0, h \to 0$ (wobei h der Abstand der beiden Deckflächen ist)

$$\int_S D \cdot n\mathrm{d}a = (D_2 - D_1) \cdot n\Delta a$$

wobei der Normalenvektor $n$ vom Gebiet 1 ins Gebiet 2 weist. Die Rechte seite gibt die Ladungsmenge in diesem Volumen an:

$$4\pi \int_V \rho \mathrm{d}^3x = 4\pi\sigma\Delta a$$

Insgesamt ergibt sich für die normalkomponenten der Felder die Grenzbedinung:

$$\begin{gathered}(D_2 - D_1) \cdot n = 4\pi\sigma \\ (B_2 - B_1) \cdot n = 0\end{gathered}$$

Die rotationsgleichungen in integraler Form lauten:

$$\begin{gathered}\int_C H\mathrm{d}l = \int_S \left[\tfrac{4\pi}{c} j + \tfrac{1}{c}\partial_t D\right] \cdot t\mathrm{d}a \\ \int_C E\mathrm{d}l = -\tfrac{1}{c} \int_S \partial_t B \cdot t\mathrm{d}a\end{gathered}$$

Wobei die Fläche speziell als rechteck gewählt, wobei zwei Rechtecksseiten und die Flächennormale $t$ Tangenten an die Trennfläche sind. Sieht man sich nun wiederum den Grenzübergang $S \to 0, h \to 0$ an (wobei h die Rechtecksseite ist, die die Trennfläche durchstößt), so ergeben die linken Seiten die Differenz der Tangentialkomponenten der Felder. Die rechte Seite des Induktionsgesetzes verschwindet, da $B$ endlich bleibt aber die Fläche gegen Null geht; die rechte Seite der Ampere-Maxwellgleichung liefert den Strom durch die Integrationsfläche, der unter der Annahme eines idealisierten Flächenstroms $K$ den Wert:

$$\int_S \left[\frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\partial_t D\right] \cdot t\mathrm{d}a = \frac{4\pi}{c} K \cdot t\Delta l$$

hat, wobei $\Delta l$ die Länge der Rechtecksseiten, die tangential zur Trennfläche verlaufen, bezeichnet.
Es ergibt sich also:

$$\begin{gathered}n \times (E_2 - E_1) = 0 \\ n \times (H_2 - H_1) = \tfrac{4\pi}{c} K\end{gathered}$$

# 2. Elektrostatik.

## 2.1 Das Gaußsche Gesetz.

Wir betrachten den Fluß des $E$-Feldes durch eine geschlossene Fläche, in der sich entweder eine Punktladung befindet oder ladungsfrei ist. Dann gilt für die mit dem Flächenelement d$a$ multiplizierte Komponente von $E$ in Richtung der Flächennormalen:

$$E \cdot n\mathrm{d}a = q\frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}a$$

Da $E$ in Richtung der Verbindungslinie vom Flächenelement zur Ladung liegt, ist $\cos\theta\mathrm{d}a = r^2\mathrm{d}\Omega$, wenn $\mathrm{d}\Omega$ der räumliche Winkel ist, unter dem das Flächenelement d$a$ vom Ort der Ladung $q$ aus erscheint. Wir können also schreiben:

$$E \cdot n \mathrm{d}a = q \mathrm{d}\Omega$$

Integriert man nun die Normalkomponente von $E$ über die gesamte Fläche, so ist leicht zu sehen, daß

$$\int_S E \mathrm{d}a = 4\pi q$$

falls die Ladung $q$ innerhalb der Fläche liegt und

$$\int_S E \mathrm{d}a = 0$$

falls die das Volumen, das von der Fläche begrenzt wird ladungsfrei ist.
Aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_S A \cdot n \mathrm{d}a = \int_V \operatorname{div} A \mathrm{d}^3 x$$

erhält man

$$\int_S E \mathrm{d}a = \int_V \operatorname{div} E \mathrm{d}^3 x = 4\pi \int_V \rho(x) \mathrm{d}^3 x$$

und somit

$$\int_V \operatorname{div} E - 4\pi\rho(x) \mathrm{d}^3 x = 0$$

für jedes beliebige Volumen $V$. Dies ist aber nur möglich falls

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho.$$